2022-05-06 Terzo Compitino Analisi 2

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**claudio.saccon@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

Cognome

xxx

Nome

yyy

Matricola

123456

Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Consideriamo una funzione continua $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x \geq 1.$$

A partire da f construiamo la successione di funzioni $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definite da:

$$f_n(x) := f(nx)$$

Nelle domande che seguono si intende che le risposte devono essere vere a partire solo dalle ipotesi fatte sopra.

2 punti

1. Si dica se le f_n tendono uniformemente a zero.

- (x) Sì
- ( ) No

2 punti

2. Si dica se $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{+\infty} f_n(x)\, dx = 0$.

- ( ) Sì
- (x) No

se $0 \le f(x) \le \frac{1}{x}$ allora

$$0 \le f_n(x) = f(nx) \le \frac{1}{nx}$$

DUNQUE $\|f_n\|_\infty \le \max_{x \ge 1} \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

da cui (a) $f_n \to 0$ UNIF

(b) nelle ipotesi sopra potrei avere $f(x) = \frac{1}{x}$ e allora

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{nx}\,dx = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

che ovviamente <u>non</u> tende a zero per $n \to +\infty$

(c) Nelle ipotesi fatte l'energia delle f_n vale

$$\int_1^{+\infty} f_n^2(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f^2(nx)\,dx = \quad \left(y = nx \quad dx = \frac{dy}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\int_n^{+\infty} f^2(y)\,dy \le \frac{1}{n^2}\int_n^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy \le \frac{1}{n^2}\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy}_{\in \mathbb{R}} \to 0$$

OPPURE SI PUÒ USARE Lebesgue dato che

$$0 \le f_n^2(x) = f^2(nx) \le \frac{1}{n^2x^2} \le \frac{1}{x^2}$$ che è integrabile su $[1, +\infty[$

2 punti

3. Si dica se le f_n tendono a zero in energia.

- [x] Sì
- [ ] No

Esercizio Due

. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{x}{n^6 + x^2}.$$

che possiamo scrivere come $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ con $f_n(x) = \dfrac{x}{n^6 + x^2}$ per x che varia in tutto $\mathbb{R}$.

2 punti

1. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.
   (a) La serie non converge in energia.
   (b) La serie converge in energia perché $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty$.
   (c) La serie converge in energia perché $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_2^2 < +\infty$.

- [ ] (a)
- [x] (b)
- [ ] (c)
- [ ] Altro: ____________

Esercizio Tre

In generale una condizione sufficiente per la

$\sum f_n$ converga in energia è

$\sum \|f_n\|_2 < +\infty$.

NON BASTA sapere che $\sum \|f_n\|_2^2 < +\infty$.

Nel caso però delle serie trigonometriche $\sum c_n e^{in\omega t}$ (in cui $f_n = c_n e^{in\omega t}$ sono tra loro ORTOGONALI)

basta sapere che $\sum \|c_n e^{in\omega t}\|_2^2 \left(= \sum |c_n|^2\right)$ è convergente

Nel caso dell'esercizio due si ha

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{n^6 + x^2}\right)^2 dx = \begin{pmatrix} x = n^3 y \\ dx = n^3 dx \end{pmatrix}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^6 y^2 n^3 dy}{(n^6 + n^6 y^2)^2} = \frac{1}{n^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2} dy$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{3/2}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2} dy\right)^{1/2}}_{\text{è finito!}} = \frac{C}{n^{3/2}} \in \text{SOMMABILE perché } \frac{3}{2} > 1$$

Nel caso dell'esercizio tre

$$c_n = \frac{n}{3+n^2} \Rightarrow |c_n|^2 = \frac{n^2}{(3+n^2)^2} \simeq \frac{1}{n^2} \in \text{SOMMABILE}$$

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{n}{3+n^2} e^{int}.$$

che possiamo scrivere come $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ con $f_n(x) = \dfrac{n}{3+n^2} e^{int}$ per x che varia in tutto $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{C}$.

2 punti

1. Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.
   (a) La serie non converge in energia.
   (b) La serie converge in energia perché $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty$.
   (c) La serie converge in energia perché $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_2^2 < +\infty$.

- ○ (a)
- ○ (b)
- ◉ (c)
- ○ Altro: ____

Esercizio Quattro

Consideriamo il campo $\vec{f}$ definito da:

$$\vec{f}(x,y) := \frac{-y}{4x^2+9y^2}\vec{\mathbf{i}} + \frac{x}{4x^2+9y^2}\vec{\mathbf{j}} \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Se $\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{4x^2+9y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{4x^2+9y^2}\,\vec{j}$ si ha

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{4x^2+9y^2} = \frac{4x^2+9y^2-x\,8x}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{-4x^2+9y^2}{(4x^2+9y^2)^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{4x^2+9y^2} = \frac{-(4x^2+9y^2)+y\,18y}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{-4x^2+9y^2}{(4x^2+9y^2)^2}$ SONO EGUALI

$\vec{f}$ È IRROTAZIONALE.

(b) Dato che $\Omega = \{(x,y) : x>0\}$ è stellato (CONVESSO!!) da

(a) deduco che $\vec{f}$ è conservativo su Ω

(c) $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\cos(t)}{2}, \frac{\sin(t)}{3}\right)\cdot\left(\frac{-\sin(t)}{2}, \frac{\cos(t)}{3}\right)dt =$

$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\underbrace{4\frac{\cos(t)^2}{4}+9\frac{\sin(t)^2}{9}}_{=1}}\left(-\frac{\sin(t)}{3}, \frac{\cos(t)}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sin(t)}{2}, \frac{\cos(t)}{3}\right)dt =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

(d) Per il punto (c), dato che c'è una curva chiusa in Ω'

γ su cui $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} \neq 0$, il campo NON è conservativo su Ω'

2 punti

1. Si dica se $\vec{f}$ è irrotazionale.

- (x) Sì
- ( ) No

2 punti

2. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo sull'aperto $\Omega := \{x > 0\}$.

- (x) Sì
- ( ) No

4 punti

3. Si calcoli l'integrale $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ fa zero, dove $\gamma(t) := \frac{\cos(t)}{2}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\sin(t)}{3}\vec{\mathrm{j}}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$.

Pi/3

2 punti

4. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo sull'aperto $\Omega' := \{(x, y) \neq (0, 0)\}$.

- ( ) Sì
- (x) No

Esercizio Cinque

Si cerca $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin(nx)$. Allora

$$y'' + m y = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 + m) y_n \sin(nx)$$

INOLTRE so che $x(x-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx)$ dove

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(x-\pi) \sin(nx).$$

Ne segue che per trovare la soluzione devo risolvere (per ogni n)

$$(*) \quad (m - n^2)\, y_n = f_n$$

QUI CI SONO DUE ALTERNATIVE

(1) $m \neq n^2 \ \forall n$ (m non è il quadrato di un intero)

e allora trovo $y_n = \frac{f_n}{m-n^2} \ \forall n$ che

mi dà un unico soluzione

(1) $m = n_0^2$ per un intero n_0. Allora la $(*)$

è verificabile se e solo se $f_{n_0} = 0$. Inoltre se $f_{n_0} = 0$

il termine y_{n_0} si può scegliere in modo arbitrario

da cui

$f_{n_0} \neq 0 \iff$ NON ESISTE SOLUZIONE

$f_{n_0} = 0 \iff$ ESISTONO INFINITE SOLUZIONI

Nell'esercizio cinque $m = 4$ che è il quadrato di 2.

Dunque devo vedere se $f_2 = 0$. Si ha

$$\frac{\pi}{2} f_2 = \int_0^{\pi} x(x-\pi) \sin(2x)\,dx =$$

$$\underbrace{\left[x(x-\pi) \frac{-\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi}} + \int_0^{\pi} (2x-\pi) \frac{\cos(2x)}{2}\,dx =$$

$$\underbrace{\left[(2x-\pi) \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{4} \int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}(1-1) = 0$$

. Consideriamo il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 4y = x(x-\pi) & \text{su } [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

4 punti

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta.
   (a) non esiste nessuna soluzione per il problema.
   (b) esiste una e una sola soluzione per il problema.
   (c) esiste un numero finito di soluzioni, maggiore di uno, per il problema.
   (d) esistono infinite soluzioni per il problema.

- (a) No
- (b)
- (c)
- (d) Sì

Esercizio Sei

Consideriamo il problema differenziale (che generalizza quello del punto precedente):

$$\begin{cases} y'' + my = x(x-\pi) & \text{su } [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

4 punti

1. Si dica quali valori di $m > 0$ esiste una e una sola soluzione.

m diverso da n^2 per ogni n intero

Esercizio Sette

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare (non omogenea):

$$(x+1)xy'' - (4x+1)y' + 4y = 4 + 2x^2.$$

Diamo per buono che le soluzioni y, se esistono, si possono scrivere (vicino a zero) come una serie di potenze: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2 punti

1. Si dica se esiste una soluzione y tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

- (•) Sì
- ( ) No

2 punti

2. Si dica se esiste un'unica soluzione y tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

- ( ) Sì
- (•) No

2 punti

3. Si dica se esiste un'unica soluzione y tale che $y(0) = 1$, $y''(0) = 1$;

- (•) Sì
- ( ) No

$$(x+1)x\,y'' - (4x+1)y' + 4y = 4+2x^2$$

Se $y = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_0^\infty a_n n\, x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)\,x^n$

$y'' = \sum_0^\infty a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)n\, x^n$

$$\Rightarrow (x+1)x\,y'' - (4x+1)y' + 4y = x^2y'' + xy'' - 4xy' - y' + 4y =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ a_n n(n-1) + a_{n+1}(n+1)n - 4a_n n - a_{n+1}(n+1) + 4a_n \right\} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ a_{n+1}(n+1)(n-1) + a_n(n^2 - n - 4n + 4) \right\} x^n =$$

$n^2-5n+4 = (n-4)(n-1)$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ a_{n+1}(n+1)(n-1) + a_n(n-4)(n-1) \right\} x^n =$$

. DUNQUE TROVO

$$(R) \quad (n-1)\left[a_{n+1}(n+1) + a_n(n-4)\right] = \begin{cases} 4 & n=0 \\ 2 & n=2 \\ 0 & \text{se } n\neq 2,\ n\neq 0 \end{cases}$$

NOTA Se $n = 4$ trovo

$a_5 \cdot 5 + a_4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_5 = 0$

da cui $a_n = 0 \quad \forall n \geq 5$

Ne segue che le soluzioni – se esistono – sono polinomi di grado 4 $\Rightarrow$ il raggio di convergenza è $+\infty$

NOTA Se $n = 1$ trovo $0 = 0$ che è sempre vero

dunque il caso $n=1$ non mi dà nessuna condizione su a_2

VEDIAMO LA DOMANDA 1/2: Condizione $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

Se uso $n=0$ in (R) trovo $-[0\cdot 1 + 1(-4)] = -4$

che è OK. $n=1$ non mi dà niente

$n=2$ mi dà $a_3 \cdot 3 - 2a_2 = 2 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{2+2a_2}{3}}$

$n=3$ mi dà $2\left[a_4 \cdot 4 - a_3\right] = 0 \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{1+a_2}{6}}$

e gli altri sono nulli

DUNQUE LA SOL. ESISTE MA NON È UNICA

(dato che a_2 è arbitrario)

DOMANDA 3 Se si impone $a_0 = 1$ $\quad a_2 = \frac{1}{2} = \frac{f''(0)}{2!}$

si vede che le $(\star)$ determinano univocamente tutti gli a_n $\quad \left(a_1 = 0 , \quad a_3 = 1 , \quad a_4 = \frac{3}{12} \right)$

DOMANDA 5 se IMPONGO $a_1 = 1$ $\quad a_2 = 0$ trovo

(ragionando come sopra) $\quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$ (perchè lo impongo)

$a_3 = \frac{2}{3}$ $\quad a_4 = \frac{1}{6}$ cioè

$$y(x) = 1 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4$$

2 punti

4. Si dica quale tra le seguenti affermazioni, riguardo alla serie che definisce $y(x)$, è corretta.

   (a) Per ogni soluzione $y(x)$ il raggio di convergenza è 1.

   (b) Per ogni soluzione $y(x)$ il raggio di convergenza è ∞.

   (c) Per ogni soluzione $y(x)$ il raggio di convergenza è maggiore di zero, ma cambia a seconda dalle condizioni iniziali.

   (d) Nessuna delle precedenti.

- ( ) (a)
- (•) (b)
- ( ) (c)
- ( ) (d)

4 punti

5. Si scriva esplicitamente una soluzione y tale che $y(0) = 1$, $y''(0) = 0$, oppure si scriva "non esiste".

1+(2/3)x^3+(1/6)x^4